ヒルベルト空間における非拡大写像と非伸張写像の共通不動点への弱収束定理 (非加法性の数理と情報 : 凸解析との接点)

家本, 繁; 高橋, 渉

数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 1-8

ヒルベルト空間における非拡大写像と非伸張写像の共通不動点への弱収束定理

家本 繁 (慶應義塾大学商学部)
Email : iemoto@fbc.keio.ac.jp
高橋 渉 (慶應義塾大学商学研究科, 台湾国立中山大学理学院)
Email : wataru@is.titech.ac.jp

概要

本稿は著者らによる論文 [3,4] を元に書かれている. 主結果では, ヒルベルト空間上の非拡大写像と非伸張写像の共通不動点を逐次近似する方法を提案し, その弱収束定理を証明している. さらに, 主結果では逐次近似法に用いる係数条件を制御することで非拡大写像, 非伸張写像それぞれの不動点を近似することができることも証明している.

1 本研究の動機

H を実ヒルベルト空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. 特に断らない限り, 以降でヒルベルト空間という場合には実ヒルベルト空間のことを表すこととする.

本稿では不動点問題とよばれる以下の問題を考える. すなわち写像 $T: C \to C$ に関する**不動点問題**とは

$$Tz = z$$

となる $z \in C$, つまり T の不動点を求める問題をいう. $F(T)$ で T の不動点全体の集合を表す. さらに, 写像 $T_1, T_2 : C \to C$ に関する**共通不動点問題**とは

$$z \in F(T_1) \cap F(T_2)$$

となる $z \in C$ を求める問題をいう. このような z を逐次的に求める近似法のことを**不動点近似法**とよぶ. エルゴード理論や非線形最適化, 数理経済学等にあらわれる多くの非線形問題が不動点問題として捉えることができる. 本稿では非拡大写像と高阪–高橋 [9] によって定義された非伸張写像を研究の中心に据えて, これらの写像に関する共通不動点問題を議論している. $T: C \to C$ が**非拡大写像**であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

を満たすときをいう. さらに, $U: C \to C$ が**堅非拡大写像** [1, 2, 6, 15–17] であるとは, 任意の

$x, y \in C$ に対して

$$\|Ux - Uy\|^2 \leq \langle x - y, Ux - Uy \rangle$$

を満たすときをいう．これは

$$\|Ux - Uy\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(I - U)x - (I - U)y\|^2$$

とも同値である．ヒルベルト空間において堅非拡大写像 U は非拡大写像であり，ある非拡大写像 T を用いて $U = 1/2(I + T)$ と表される [2,6]．一方，高阪–高橋 [9] は非伸張写像とよばれる非線形写像を次のように定義している．E を滑らかなバナッハ空間，$J : E \to E^*$ を双対写像とし，C を E の空でない閉凸部分集合とする．このとき $S : C \to C$ が**非伸張写像**であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\phi(Sx, Sy) + \phi(Sy, Sx) \leq \phi(Sx, y) + \phi(Sy, x)$$

を満たすときをいう．ただし，$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$ である．このような写像はバナッハ空間における極大単調作用素を研究するために考案されたものである．一方，ヒルベルト空間において双対写像 J は恒等写像 I になるため，$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$ となる．よってヒルベルト空間上で $S : C \to C$ が**非伸張写像**であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$2\|Sx - Sy\|^2 \leq \|Sx - y\|^2 + \|Sy - x\|^2$$

を満たすときをいう．非伸張写像も堅非拡大写像を含む写像であるが (補題 3.4)，一般には連続ではないことが知られている (例 3.2)．しかしながら，不動点をもつ非拡大写像と非伸張写像はどちらも準非拡大写像になる．すなわち，$Q : C \to C$ が**準非拡大写像**であるとは，$F(Q) \neq \emptyset$ で，任意の $x \in C$, $q \in F(Q)$ に対して

$$\|Qx - q\| \leq \|x - q\|$$

を満たすときをいう．

C を H の空でない閉凸部分集合とし，$T_1, T_2 : C \to C$ を 2 つの異なる非拡大写像とする．T_1, T_2 に対する不動点近似法として，石川 [7] による方法を拡張した高橋–田村 [18] による次の逐次近似法がある．

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n T_1\{\beta_n T_2 x_n + (1 - \beta_n)x_n\} + (1 - \alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

ただし，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$．また，Moudafi [12] によって提案された次の逐次近似法もある．

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n\{\beta_n T_1 x_n + (1 - \beta_n)T_2 x_n\} + (1 - \alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

ただし，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$．これらの不動点近似法に用いる写像 T_1, T_2 を非拡大写像と非伸張写像で考えた際に，構成される点列 $\{x_n\}$ がどのような振る舞いをするかを研究した結果が本稿の内容である．

2 準備

はじめに本稿で用いる記号を整理しておく. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ をそれぞれ自然数全体, 実数全体の集合を表す. H をヒルベルト空間とする. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ は内積を, $\|\cdot\|$ はノルムを表す. ヒルベルト空間 H の空でない部分集合 C に対して, $F(T)$ で写像 $T : C \to C$ の不動点集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ を表す. 点列 $\{x_n\} \subset H$ に対して, $x_n \to x$, $x_n \rightharpoonup x$ でそれぞれ x への強収束, 弱収束を表す.

ヒルベルト空間が任意の $x, y \in H$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha \|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \tag{2.1}$$

を満たすことはよく知られている [15–17]. さらに任意の $x, y, z, w \in H$ に対して

$$2\langle x-y, z-w \rangle = \|x-w\|^2 + \|y-z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-w\|^2 \tag{2.2}$$

が成り立つことが高阪–高橋 [8,9] によって示されている ([4] も参照のこと). また, ヒルベルト空間 H は Opial [13] による次の性質を満たす. すなわち, $x_n \rightharpoonup x_0$ を満たす任意の点列 $\{x_n\} \subset H$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が任意の $y \neq x_0$ なる $y \in H$ で成り立つ ([15–17] も参照のこと).

C を H の空でない閉凸部分集合とする. $T : C \to C$ が非拡大写像であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

を満たすときをいう. (2.1) から $F(T)$ が閉凸集合となることが示せる. また, 非拡大写像 $T : C \to C$ は demiclosed である, すなわち $x_n \rightharpoonup u$, $x_n - Tx_n \to 0$ ならば $u \in F(T)$ である [15–17]. 一方, 非拡大写像について次の不動点定理が証明されている.

定理 2.1 ([15–17]). H をヒルベルト空間, $C \subset H$ を空でない閉凸部分集合とし, $T : C \to C$ を非拡大写像とする. このとき, 以下は同値である.

(1) $x \in C$ が存在して, $\{T^n x\}$ は有界である.
(2) 写像 T は不動点をもつ.

$U : C \to C$ が堅非拡大写像であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Ux - Uy\|^2 \leq \langle x - y, Ux - Uy \rangle$$

を満たすときをいう. ヒルベルト空間においては, 距離射影や単調作用素のリゾルベントが堅非拡大写像の例として知られている. $S : C \to C$ が非伸張写像であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$2\|Sx - Sy\|^2 \leq \|Sx - y\|^2 + \|Sy - x\|^2$$

を満たすときをいう．非伸張写像に対しても定理 2.1 と同様の不動点定理が証明されている ([11] も参照のこと).

定理 2.2 ([9])**.** H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とし, $S:C\to C$ を非伸張写像とする．このとき, 以下は同値である．

(1) $x\in C$ が存在して, $\{S^nx\}$ は有界である．
(2) 写像 S は不動点をもつ．

さらに非伸張写像 $S:C\to C$ に対して, その不動点集合 $F(S)$ が閉凸集合となることも高阪–高橋 [9], 松下–高橋 [11] で示されている．これらの非伸張写像に関する結果 [9, 11] は, バナッハ空間で証明されていることを付記しておく．

3 非伸張写像の性質とその例

高阪–高橋 [9] によって定義された非伸張写像は, 前節でも確認したようにいくつかの点で非拡大写像と似通っていることがわかる．ここでは家本–高橋 [4] で得られたものを中心に, ヒルベルト空間特有の非伸張写像がもつ性質を述べる．

まず非伸張写像はヒルベルト空間において次のように特徴付けされる．さらにこの特徴付けを用いて, 非伸張写像が非拡大写像と同様に demiclosed であることも示すことができる．

補題 3.1 ([4])**.** H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする．このとき $S:C\to C$ が非伸張写像であることと, 任意の $x,y\in C$ に対して

$$\|Sx-Sy\|^2\leq\|x-y\|^2+2\langle x-Sx,y-Sy\rangle$$

を満たすこととは同値である．.

補題 3.2 ([4])**.** H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とし, $S:C\to C$ を非伸張写像とする．このとき S は demiclosed である．すなわち, $x_n\rightharpoonup u$, $x_n-Sx_n\to 0$ ならば $u\in F(S)$.

C を H の空でない閉凸部分集合とする．このとき $T:C\to C$ が非拡大写像ならば $I-T:C\to H$ は 1/2-逆強単調作用素, すなわち任意の $x,y\in C$ に対して

$$\frac{1}{2}\|(I-T)x-(I-T)y\|^2\leq\langle x-y,(I-T)x-(I-T)y\rangle$$

になる．ここで, $I:H\to H$ は恒等写像を表す．$\alpha>0$ とする．一般に $A:C\to H$ が **α-逆強単調作用素**であるとは, 任意の $x,y\in C$ に対して

$$\alpha\|Ax-Ay\|^2\leq\langle x-y,Ax-Ay\rangle$$

を満たすときをいう [17]．これと同様のことが非伸張写像についてもいえるかどうかというのは自然な疑問であるが, これについては次の補題が知られている．

補題 3.3 ([4]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. 非伸張写像 $S : C \to C$ に対して, 写像 A を $A = I - S$ で定義する. このとき, $A : C \to H$ は任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Ax - Ay\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle + \frac{1}{2}(\|Ax\|^2 + \|Ay\|^2)$$

を満たす.

前節で堅非拡大写像は非拡大写像になることを確認したが, これは非伸張写像にもなることが示せる. これは非伸張写像の重要な例の 1 つでもある.

補題 3.4 ([4,8,9]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 堅非拡大写像 $U : C \to C$ は非伸張写像である.

最後に非伸張写像の例をいくつか挙げる.

例 3.1. $\mathbb{R}^2$ に対して, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$, $P_C : \mathbb{R}^2 \to C$ を C への距離射影とする. $R_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $R_C = 2P_C - I$ で定義する. このとき, R_C は非伸張写像である. この R_C を **reflection** とよぶ.

例 3.2 ([5]). H をヒルベルト空間とし $D = \{z \in H : \|z\| \leq 2\}$, $C = \{z \in H : \|z\| \leq 3\}$ とおく. $S : C \to C$ を

$$Sx = \begin{cases} 0 & (x \in D), \\ x/\|x\| & (x \in C \setminus D) \end{cases}$$

で定義する. このとき, S は非伸張写像である.

4 主結果

本稿の主結果の動機となったのは, 高橋–田村 [18] による一様凸バナッハ空間における次の弱収束定理である. ここでは主結果に合わせてヒルベルト空間の定理に書き換えている.

定理 4.1 ([18]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $T_1, T_2 : C \to C$ を $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ となる非拡大写像とする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T_1\{\beta_n T_2 x_n + (1 - \beta_n)x_n\} + (1 - \alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$ である. このとき, 以下が成り立つ.

(1) ある $0 < a \leq b < 1$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$, $\{\beta_n\} \subset [0, b]$ で, 部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が $x_{n_i} \rightharpoonup y$ ならば $y \in F(T_1)$.
(2) ある $0 < a \leq b < 1$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\{\alpha_n\} \subset [a, 1]$, $\{\beta_n\} \subset [a, b]$ で, 部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が $x_{n_i} \rightharpoonup y$ ならば $y \in F(T_2)$.
(3) ある $0 < a \leq b < 1$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [a, b]$ で, 部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が $x_{n_i} \rightharpoonup y$ ならば $y \in F(T_1) \cap F(T_2)$.

C を H の空でない閉凸部分集合とする. 定理 4.1 を動機として当初, $F(S) \cap F(T) = \emptyset$ なる非伸張写像 $S : C \to C$ と非拡大写像 $T : C \to C$ に対し, 写像 S, T それぞれの不動点を不動点近似法によって求める手法を研究していた. その際に用いた不動点近似法は

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n T(\beta_n S x_n + (1-\beta_n)x_n) + (1-\alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{4.1}$$

である. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ とする. しかしながら, 以下の例は写像 S の不動点を近似できない場合があることを示している. (4.1) において, 写像 S, T の役割を交換しても同様の例が作れる.

例 4.1. 実数直線 $\mathbb{R}$ において, $C = [1, \infty)$, $D = (-\infty, 0]$ とおく. このとき, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C への reflection, すなわち $S = R_C = 2P_C - I$ とし, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を D への距離射影, すなわち $T = P_D$ とする. このとき $F(S) \cap F(T) = C \cap D = \emptyset$ であるが, (4.1) によって構成される点列 $\{x_n\}$ が $F(S)$ の元に収束しない場合がある.

証明. (4.1) の初期点を $x_1 = 0$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha_1 P_D(\beta_1 R_C x_1 + (1-\beta_1)x_1) + (1-\alpha_1)x_1 \\ &= \alpha_1 P_D(\beta_1 R_C(0) + (1-\beta_1)\cdot 0) + (1-\alpha_1)\cdot 0 \\ &= \alpha_1 P_D(2\beta_1) \\ &= \alpha_1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

同様にして $x_3 = 0$. これを帰納的に繰り返すと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = 0 \in D = F(T)$. □

そこで高橋–田村 [18], Moudafi [12] を動機として, 非伸張写像 $S : C \to C$ と非拡大写像 $T : C \to C$ の共通不動点 $F(S) \cap F(T)$ の存在を仮定した下で, 以下の逐次近似法の弱収束性について研究を行った. すなわち, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n S(\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n) + (1-\alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n T(\beta_n S x_n + (1-\beta_n)x_n) + (1-\alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n (\beta_n S x_n + (1-\beta_n)T x_n) + (1-\alpha_n)x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{4.4}$$

で構成する. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ とする. これらの点列に対して, 前節で示した非伸張写像に関する補題を用いて以下の主結果を得た.

定理 4.2 ([3]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. $S : C \to C$ を非伸張写像, $T : C \to C$ を非拡大写像とし, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ とする. 点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ をそれぞれ (4.2), (4.3) で構成する. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(S)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$ ならば $y_n \rightharpoonup w\in F(T)$.

(3) $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$, $\liminf_{n\to\infty}\beta_n(1-\beta_n)>0$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(S)\cap F(T)$, $y_n \rightharpoonup w\in F(S)\cap F(T)$.

定理 4.3 ([4]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. $S:C\to C$ を非伸張写像, $T:C\to C$ を非拡大写像とし, $F(S)\cap F(T)\neq\emptyset$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を (4.4) で構成する. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\beta_n)<\infty$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(S)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(T)$.

(3) $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$, $\liminf_{n\to\infty}\beta_n(1-\beta_n)>0$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(S)\cap F(T)$.

定理 4.2, 4.3 を用いて, 松下–高橋 [10], Reich [14] の結果と関連のある次の系を証明することができる.

系 4.1 ([10]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. $S:C\to C$ を非伸張写像とし, $F(S)\neq\emptyset$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1\in C, \\ x_{n+1}=\alpha_n Sx_n+(1-\alpha_n)x_n \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

で構成する. ただし $\alpha_n\in(0,1]$. $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(S)$.

系 4.2 ([14]). H をヒルベルト空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. $T:C\to C$ を非拡大写像とし, $F(T)\neq\emptyset$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1\in C, \\ x_{n+1}=\alpha_n Tx_n+(1-\alpha_n)x_n \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

で構成する. ただし $\alpha_n\in(0,1]$. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$ ならば $x_n \rightharpoonup v\in F(T)$.

参考文献

[1] F. E. Browder, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[2] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] S. Iemoto, K. Takahashi, and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (Matsue, Japan, 2008), Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 63–73.

[4] S. Iemoto and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*, Nonlinear Anal., to appear.

[5] T. Igarashi, W. Takahashi, and K. Tanaka, *Weak convergence theorems for nonspreading mappings and equilibrium problems*, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (Matsue, Japan, 2008), Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 75–85.

[6] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[7] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[8] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM. J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[9] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **91** (2008), 166–177.

[10] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[11] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[12] A. Moudafi, *Krasnoselski-Mann iteration for hierarchical fixed-point problems*, Inverse Problems **23** (2007), 1635–1640.

[13] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[14] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[16] ———, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[17] ———, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[18] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Anal. **5** (1998), 45–56.